مقاله

نگاه کردن به پیتزا با چشم ریاضی

نویسنده: ماریون والتر[1]
ترجمه: سهیلا غلام‌آزاد
پژوهشگاه مطالعات آموزش‌وپرورش

کلیدواژه‌ها: حل مسئله، مدل‌سازی، راه‌حل‌های متنوع، راهبردهای حل مسئله، تقسیم عادلانهٔ پیتزا

راه‌های زیادی برای تولید مسائل ریاضی از یک نقطهٔ شروع وجود دارد. در اینجا می‌خواهم افکاری را شرح دهم که مرا به تولید تعدادی از این مسائل هدایت کرد. در حین کار روی این مسائل، به‌طور آگاهانه تلاش کردم تا حد امکان، مراحل عمل را یادداشت‌برداری و پیگیری کنم.

دامنهٔ این مسائل، که بسیاری از آن‌ها برای من جدید هستند، از سطح پیش‌دبستان تا دانشگاه است. می‌دانم اگر قبل از بیانشان، شرح دهم که چطور به ایدهٔ طرح این مسائل رسیدم، اشاره‌ای به راه‌های احتمالی حل کردن آن‌ها خواهد شد. در نتیجه، با بیان اولین مسئله در این زنجیره، شروع خواهم کرد. به این ترتیب، شما به‌عنوان خواننده، فرصتی خواهید داشت که آن‌ها را بدون راهنمایی‌های من حل کنید. بعد از آنکه نخستین مسئله را خواندید، و قبل از آنکه به خواندن ادامه دهید، ببینید به چند راه مختلف می‌توانید آن را حل کنید. این شما هستید که باید درمورد دقتی که از خود انتظار دارید، تصمیم بگیرید.

اولین مسائل

تصور کنید با دو نفر از دوستان خود در یک رستوران هستید و سفارش یک پیتزای بزرگ و یک پیتزای کوچک را داده‌اید. پیش‌خدمت آن‌ها را می‌آورد و متوجه می‌شود که شما بر سر اینکه چطور پیتزاها را به‌طور عادلانه بین خودتان تقسیم کنید، مشغول بحث هستید. او می‌گوید:

خوب! چون پیتزای بزرگ دو برابر پیتزای کوچک است و شما سه نفر هستید، می‌توانید فقط پیتزای بزرگ را نصف کنید و به این ترتیب، هر کدام مقدار یکسانی پیتزا خواهید داشت.

چطور می‌توانید درست بودن حرف پیش‌خدمت را بررسی کنید؟ شما نه با خودتان متر یا خط‌کش آورده‌اید و نه می‌توانید به آشپزخانه بروید و پیتزاها را وزن کنید. نیازی هم نیست که نگران خمیر پیتزاها باشید، آن‌ها تا لبه‌ها به‌طور یکنواخت هستند (البته، اگر بعدها لبهٔ خمیری ملاحظه کردید، می‌تواند مشکل ایجاد کند). بنابراین، حالا قبل از آنکه به خواندن ادامه دهید، سعی کنید راه‌های متنوعِ نشان دادنِ آنکه L=۲S را بیابید.

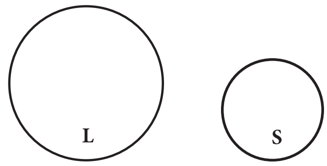
قبل از تشریح آنکه چطور به این مسئله رسیدم، مکث می‌کنم تا انواع متداول مسائل پیتزا را به یاد آوریم (برای آنکه تا حدی شما را از نگاه زیر چشمی به راه‌حل منصرف کنم!) مسائل استاندارد پیتزا، معمولاً با قیمت پیتزا یا تعداد انتخاب‌های مختلف آن سروکار دارد. دو مثال عمومی آن‌ها عبارت‌اند از:

کدام معاملهٔ بهتری است: یک پیتزا به قطر ۱۴ اینچ به قیمت ۱۳ دلار یا دو پیتزای ۱۰ اینچی هر یک به قیمت ۷ دلار؟

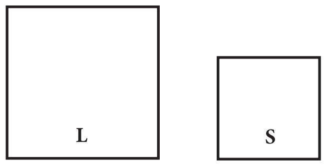
اگر پنج مادهٔ غذایی[۲] مختلف برای روی پیتزا در دسترس باشد و در یک فروش ویژه، انتخاب هر سه‌تای آن‌ها مجاز باشد، به چند راه مختلف، می‌توان یک پیتزا سفارش داد؟

حال شرح خواهم داد که چطور به مسئلهٔ اول رسیدم، که آن نیز به‌نوبهٔ خود منجر به طرح تعداد دیگری مسئله شد. در گذشته، در کلاس‌های درس و در سخنرانی‌ها می‌پرسیدم که اگر اندازه‌گیری ضلع مربع‌ها مجاز نباشد، چگونه کسی می‌تواند به سرعت چک کند که آیا مساحت یک مربع بزرگ (L) دو برابر مساحت مربع کوچک (S) است؟

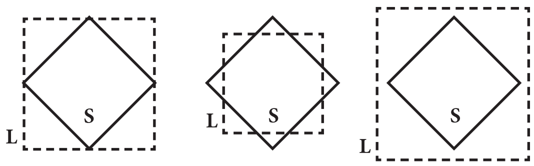
بعضی اوقات، برای ایجاد انگیزه درمورد این سؤال، با استفاده از طلق رنگی روی اُورهِد، دنباله‌ای از مربع‌های تودرتو را نشان می‌دادم و سؤال می‌کردم که کدام یک



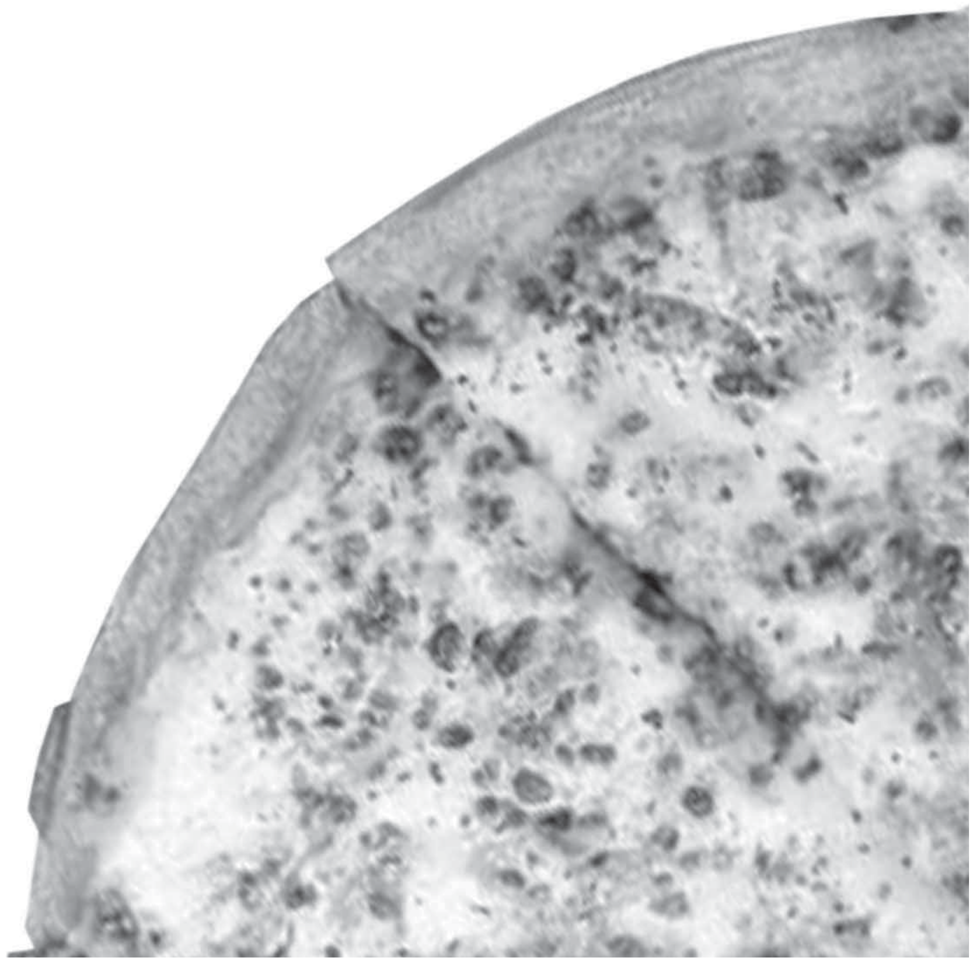
شکل۱:
دو پیتزا: پیتزای بزرگ L و پیتزای کوچک S

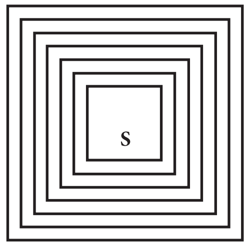


شکل ۲:
آیا مساحت مربع بزرگ (L) دو برابر مساحت مربع کوچک (S) است؟

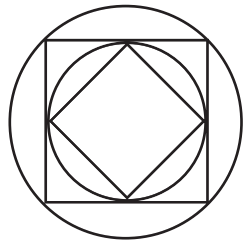


شکل۴:
L زیادی بزرگ است
L زیادی کوچک است
L دو برابر S است

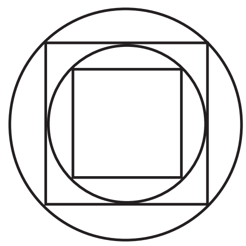




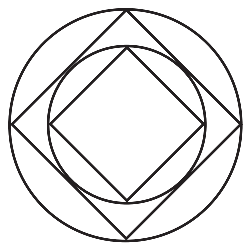
شکل ۳الف:
با استفاده از طلق رنگی: مساحت کدام مربع دو برابر مساحت مربع S است؟



شکل ۵ الف:
رسم دایره‌های محیطی



شکل ۵ ب:
چرخاندن مربع کوچک



شکل ۵ پ:
چرخاندن مربع بزرگ

از ایـن مربع‌ها، دو برابر مساحت کوچک‌ترین آن‌ها را دارد؟

همچنین، نقاشی فرانک استلا[3] یا جوزف آلبرز[4] را هم به‌همراه مسئله نشان می‌دهم. (شکل‌های ۳ب و ۳پ را ببینید) (مراجعه شود به صفحهٔ ۲ جلد)

یک راه ساده برای بررسی آنکه آیا مربع L دو برابر مساحت مربع S را دارد، در شکل ۴ نشان داده شده است.

بعد از اثبات آنکه مربع L مساحتی دو برابر مساحت مربع S دارد، غالب اوقات دایره‌ای به دور مربع S و دایره‌ای به دور مربع L محیط می‌کنم و هر یک از مربع‌ها را می‌چرخانم تا همان‌گونه که در شکل‌های ۵ الف- پ نشان داده شده است مربع‌هایی با اضلاع موازی به‌دست آید.

داشتم برای یک سخنرانی آماده می‌شدم- ناخودآگاه، موقعیت مربع بالا را در نظر گرفتم– اما واقعاً نمی‌خواستم دیگر از این مسئله استفاده کنم. من قبلاً شکل ۵ الف را کشیده بودم، پس از خودم پرسیدم شاید بتوانم این مسئله را تغییر شکل بدهم. صدای قدرتمند پولیا را شنیدم که می‌گفت «به مسئلهٔ مرتبط فکر کن[5]» و «به مسئله نگاه کن[6]». [1] پس دوباره به شکل ۵ الف نگاه کردم و آن را نه به‌عنوان مسئله‌ای که با دو مربع سروکار دارد، بلکه به‌عنوان مسئله‌ای که با دو دایره سروکار دارد دیدم. آها! اینجا یک مسئلهٔ تغییر شکل یافته ایجاد شد– چطور کسی می‌تواند به‌سرعت بگوید که آیا یک دایره دو برابر بزرگ‌تر از دایره‌ای دیگر است؟ اما حالا دیگر نقاشی استلا یا آلبرز را نداشتم که با آن‌ها، درمورد مسئله ایجاد انگیزه کنم یا آن را زینت دهم. چطور می‌توانستم این مسئله را ارائه کنم؟

تصمیم گرفتم آن را به مسئلهٔ پیتزا برگردانم. پس اینجا مسئلهٔ اولی بود که با آن شروع کردم — چطور می‌توانی بگویی که پیتزای L دو برابر بزرگ‌تر از پیتزای S است؟ امیدوارم تا الآن، این مسئله را از چندین راه مختلف حل کرده باشید.

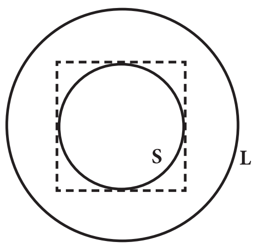
در اینجا برخی از روش‌هایی که به آن‌ها فکر کردم و همه به هم ربط داشتند، آورده شده است. [2]

۱. یکی از پیتزاها را طوری روی دیگری بگذار که مرکزشان روی هم قرار بگیرد سپس با چشم (یا با استفاده از انگشتانت) به‌طور ذهنی، چهار مماس بر پیتزای کوچک رسم کن و ببین که آیا مربعی محاط در پیتزای بزرگ تشکیل می‌دهد. (شکل ۶ را ببینید.)

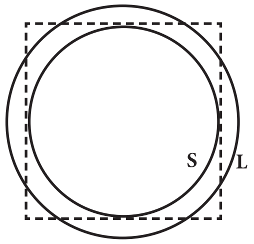
۲. متوجه شدم که قطر دایرهٔ کوچک برابر یکی از پاره‌خط‌های مماس است که دو انتهای آن روی دایرهٔ بزرگ قرار دارد. (شکل ۷ را ببینید.)

پس اگر پیتزای کوچک را نصف کنیم به‌وسیلهٔ آن می‌توانیم ببینیم که آیا قطرش دقیقاً بین نقاط قطب‌نمای دایرهٔ بزرگ[7] قرار می‌گیرد. (شکل ۸ الف را ببینید.)

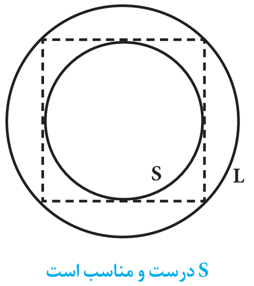
۳. اگر نمی‌خواهید پیتزای کوچک را نصف کنید، قطر پیتزای کوچک را چک کنید تا ببینید که آیا بین نقاط قطب‌نمای دایرهٔ بزرگ امتداد دارد. (شکل ۸ب را ببینید)



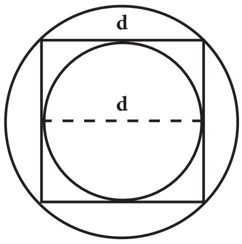
S زیادی کوچک است

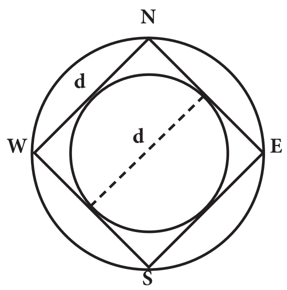


S زیادی بزرگ است

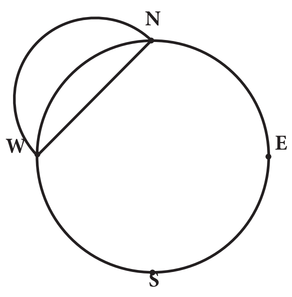


S درست و مناسب است
شکل ۶

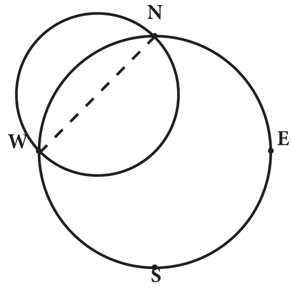




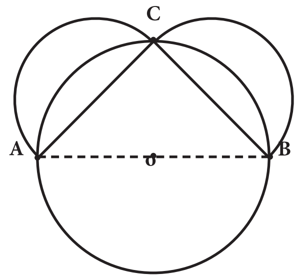
شکل ۷



شکل ۸الف:
با استفاده از نصف پیتزای کوچک



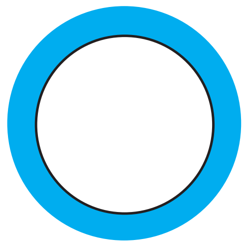
شکل ۸ب:
با استفاده از کل پیتزای کوچک



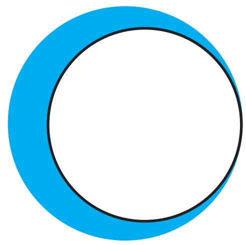
شکل ۹:
دو نصفه پیتزا ساق‌های یک مثلث قائم‌الزاویه را شکل می‌دهد

بعد چند تا کاغذ روغنی را به شکل دایره می‌برم، زیرا به‌دلیل شفاف بودن، برای استفاده روی اورهد مناسب هستند. دایرهٔ کوچک را نصف می‌کنم و هر نصفه از آن را در یک دستم می‌گیرم. به‌طور طبیعی، همان‌طور که در شکل ۹ نشان داده شده است، آن‌ها را روی دایرهٔ بزرگ می‌گذارم تا ببینم که آیا نقاط انتهایی قطر دایرهٔ کوچک روی نقاط انتهایی قطر دایرهٔ بزرگ قرار می‌گیرد؟

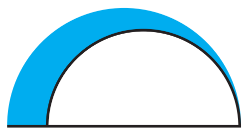
چون به‌نظر می‌رسد که AB از مرکز دایرهٔ بزرگ می‌گذرد، زاویهٔ C قائم‌الزاویه است و در نتیجه تعمیم قضیهٔ فیثاغورس قابل اعمال است. پس می‌توانیم نتیجه بگیریم که مساحت دو نیم‌دایرهٔ کوچک برابر مساحت نیم‌دایرهٔ بزرگ است. [۳]
با قرار دادن مرکز دو دایرهٔ کاغذی روی هم فهمیدم که می‌توانستم مسئلهٔ اصلی را از راه دیگری بپرسم. نشان دهید که قسمت سایه‌دار نصف پیتزای بزرگ است. (شکل ۱۰ را ببینید.)



شکل ۱۰:
آیا قسمت سایه‌دار برابر نصف دایرهٔ بزرگ است؟



شکل ۱۱الف:
نصف پیتزای جالب دیگر

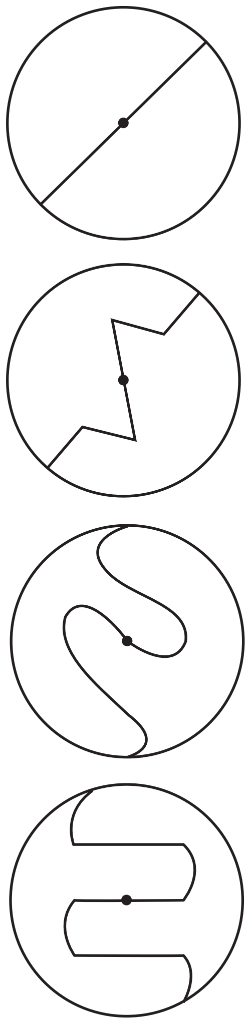


شکل ۱۱ب:
ربع پیتزای بزرگ

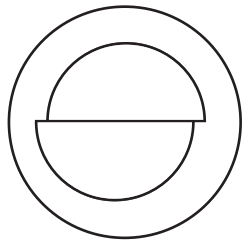
اگر در ابتدا سؤال را از این راه از خودم پرسیده بودم، شاید رویکرد دیگری برای حل آن به‌کار می‌بردم. اما همین‌که پی بردم این راهی جالب برای تقسیم پیتزا به دو نیمه است، به جهت دیگری کشانده شدم. در اینجا توانستم دایرهٔ داخلی را حرکت دهم و بر دایرهٔ بزرگ مماس داخل کنم و قسمت سایه‌دار را به‌صورت هلال ماه نشان بدهم. (شکل ۱۱الف را ببینید.)
اگر این شکل به‌طور متقارن به دو نیم شود، به شکل جالبی از ربع دایرهٔ بزرگ می‌رسیم. (شکل ۱۱ب را ببینید.)

حال رسیدم به اینکه:
به چند راه مختلف می‌توان یک پیتزا را نصف کرد؟
من دفعات زیادی با نصفه‌های دو بعدی و سه بعدی برخورد داشتم.

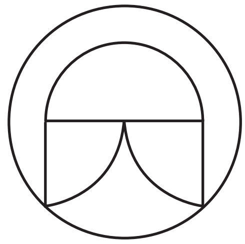
اغلب اوقات عکس‌های مجسمهٔ نیم‌کرهٔ مکس بیل[۸] را استفاده کرده‌ام. به‌طور خاص، از شرکت‌کنندگان خواسته‌ام که یک سیب را مانند مجسمه‌ای که در شکل ۱۲ نشان داده شده است ببرند. (مراجعه شود به صفحهٔ ۲ جلد)
پس برمی‌گردیم به این سؤال که به چند راه می‌توانید دایره‌ای را نصف کنید؟ ممکن است علاوه‌بر موارد داده شده در شکل ۱۳، پاسخ‌های «بدیهی» بسیار زیاد دیگری تولید کنید.
با استفاده از ایدهٔ «اگر نه چه؟[۹]»[۴] در اولین تصویر شکل ۱۳، با تمرکز بر ویژگیِ «برش مستقیم»، اول پرسیدم: «چه می‌شود اگر برش



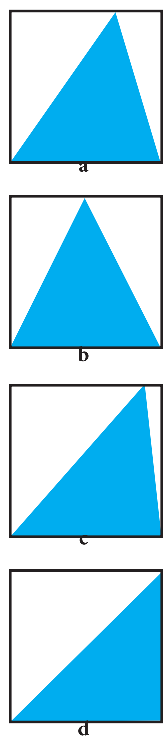
شکل ۱۳:
بعضی نصف کردن‌های معمول و غیرمعمول دایره



شکل ۱۴الف:
ترکیب دوبارهٔ دو نیم‌دایرهٔ دایرهٔ کوچک



شکل ۱۴ب:
ترکیب دوبارهٔ ربع دایره‌های نیم‌دایره

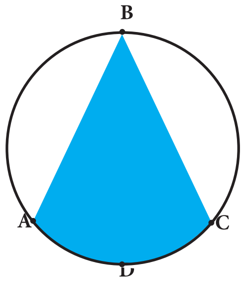


شکل ۱۵:
نصفش را در نظر بگیر

الزاماً مســتقیم نباشد؟»پس از آن راه‌های نامحدودی برای نصف کردن مربع پیدا می‌شـود. بعد به ویژگی «دو قسمت مساحت مساوی داشته و هم‌نهشت هســتند» فکر کردم و پرسیدم چه می‌شود اگر قسمت‌ها الزاماً هم‌نهشــت نباشــند؟ خوب ممکن اســت تصویری از حلقه‌های متحدالمرکز به‌دست آورید. در این نقطه، من شکل‌های دیگر را بررسی نمی‌کنم. فقط وقتی بالاخره داشتم ایــن مقاله را تایپ می‌کردم، به فکر نصــف کــردن، از راه‌هایــی که در شــکل‌های ۱۴الف- ب نشان داده شده است افتادم.

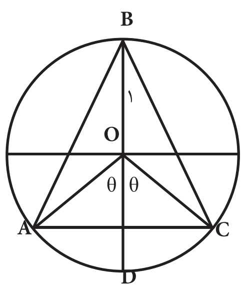
در عــوض، روی ویژگی «هر نیمه در یــک قطعه» تمرکز کردم و از خودم پرســیدم: چه می‌شود اگر لازم نباشد در یک قطعه باشد؟ در اینجا، پوســتری به یادم آمد که راه‌های نصف کردن یک مربع را نشان می‌دهد. (شکل ۱۵ را ببینید.) و آن ایده من را به رســم شکل ۱۶ سوق داد و طرح این سؤال که چه می‌شود اگر یک نیمه به شــکل یک برش کیک (پای) باشد و نیمهٔ باقیماندهٔ دو قطعه باشد؟

چطــور می‌توانم ایــن برش را مشــخص کنم؟ من این مســئله را دوست داشتم، چون قبلاً آن را ندیده بودم و در نتیجه، تصمیم گرفتم بعد روی آن کار کنم. من می‌توانستم نصف آن شکل هندسی را در نظر گرفته و بپرســم: «نیم‌دایــره‌ای به قطر BD مفروض است، نقطهٔ C را چنان بیابید که BC نیم‌دایره را نصف کند». اولین فکرم (که خیلی هم دوام نداشت) این بود که «مجبورم از حسابان استفاده کنم». اما به‌سرعت نظرم عوض شد، زیرا قرار بود برای شنوندگانی صحبت کنم که شامل معلمان متوسطهٔ اول (دورهٔ راهنمایــی) نیز می‌شــد. در نتیجه تصمیم گرفتم این مسئله را بدون اســتفاده از حسابان حل کنم. مشابه شکل ۱۵b در مربع، قطعه‌ای با یک خط تقارن — BD (شکل ۱۶) کشیده‌بودم. پس اگر می‌دانستم نقاط A و C کجا بودند، برش مشــخص می‌شد. پس اینجا مسئلهٔ بعدی من مطرح شد: اگر ABCD نصف پیتزایی



شکل ۱۶:
نصف پیتزا به شکل یک برش کیک است و نصف دیگر دو قطعه است

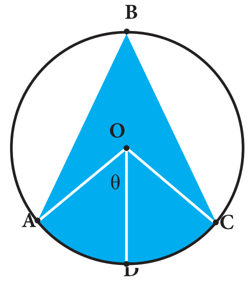
به شــعاع ۱ باشــد (منوط به سلب مسئولیت معمولِ بدون از دست دادن کلیت)، زاویــهٔ مرکزی AOC چقدر اســت، چون اگر اندازهٔ زاویهٔ مرکزی را می‌دانستم، آنگاه A و C مشخص می‌شدند. (به شکل ۱۷ نگاه کنید.) معادله‌ای که برای θ به‌دســت آوردم، از نوعــی بود که قبلاً ندیده بودم. بدون داشتن ماشین حساب



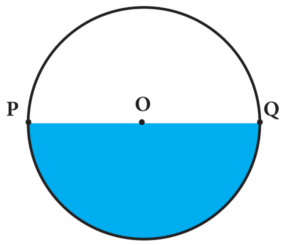
شکل ۱۷

لوکس، آن را از طریق تکرار[10] حل کردم. [۵]

بعدها وقتی دوباره به شــکل برش کیک نگاه کردم و شــروع به نوشــتن این مقاله کردم، دیدم دو



الف



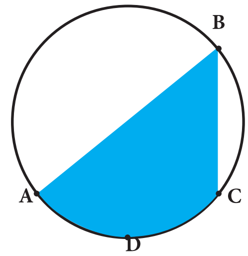
ب

شکل ۱۸:
دو حالت اکستریم (و متقارن)

ترسیم (شکل‌های ۱۸الف و ۱۸ب) روی میز در مقابل خودم داشتم و از خودم این ســؤال را پرسیدم که «چی می‌شــد اگر این شکل برش کیک، خط تقارن نداشت؟»

به عبــارت دیگر، چه می‌شــد اگــر AB برابر CB نبود؟ فکر کردم B را روی محیــط دایــره حرکت بدهــم، به‌طوری‌کــه ABCD برابر نصف مســاحت دایره باقــی بماند. واضح اســت که AC نیز مجبور به جابه‌جایی می‌شــد. برای آنکه من دو حالت اکســترمم در مقابل خود داشتم و درسی که در فیلم انیمیشن داشــته‌ام— و کتاب تصاویر هندسی (بینــی و همــکاران[11]، ۱۹۸۲) نیز بــه ذهنم آمد— از خودم پرســیدم داستان‌پردازی برای فیلم متحرکی کــه در آن بــرش پای شــکلی که نصف مســاحت دایره را دارد (شکل ۱۸الف) بخواهد به نیم‌دایره (شکل ۱۸ب) تغییر شکل پیدا کند چگونه باید باشد. باید اقرار کنم که چندین

بار شروع نادرست داشتم تا اینکه بالاخره،روی قطر PQ دایره تمرکز کردم و از آنچه که برای خط AC رخ می‌داد وقتی B از بالاترین نقطه حرکت می‌کرد و پایین می‌آمد تا اینکه روی نقطهٔ انتهایی قطر PQ دایره منطبق می‌شد، اطمینان یافتم.

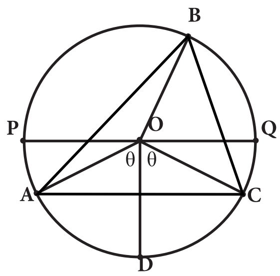


شکل ۱۹: قسمتی که به شکل برش کیک است، مساحتی برابر نصف مساحت دایره را دارد، اما AB≠BC

همچنین، درمورد قضیه‌ای که بیان می‌کند که برای نقاط ثابت A و C، وقتی نقطهٔ B روی کمان مربوط‌اش روی دایره حرکت می‌کند، زاویهٔ ABC ثابت باقی می‌ماند، فکر کردم. من خودم را سرزنش کردم که همهٔ این سال‌ها، حتی یک‌بار هم از خودم نپرسیدم که درمورد مساحت **ABCD**، برای نقاط ثابت A و C وقتی نقطهٔ B روی کمان دایره حرکت می‌کند، چه چیز دیگری غیر از اینکه مساحت آن به‌سمت مساحت ACD می‌رود، می‌توانست گفته شود. (شکل ۱۹ را ببینید.) اما اکنون، به حرکت دادن B به‌طوری که مساحت برش ABCD ثابت باقی بماند (نصف مساحت دایره) علاقه‌مند شده بودم. اگر قرار باشد مساحت ثابت بماند، AC نیز مجبور به حرکت خواهد بود.

سومین مسئلهٔ پیتزای من

چگونه می‌توان تعیین کرد که یک گوه[12] به شکل برش کیک، که متقارن نیست مساحتی برابر نصف مساحت یک دایره را دارد؟ (شکل ۱۹ را ببینید.) اگر چه گُوهٔ ABCD دیگر متقارن نیست، هنوز می‌توانستم نصف زاویهٔ مرکزی را تعیین کنم، چون OA و OC هنوز نسبت به عمودمنصف OD از AC متقارن هستند. مثل حالت متقارن، مساحت



شکل ۲۰: OD هنوز نسبت به AC به‌طور متقارن قرار گرفته است

گُوه را با در نظر گرفتن مساحت مثلث ABC به‌اضافهٔ مساحت قطاع AOC منهای مساحت مثلث AOC، محاسبه کردم– حالا این مساحت گُوه را برابر $\pi/۲$ ، یعنی نصف مساحت دایره قرار می‌دهیم.

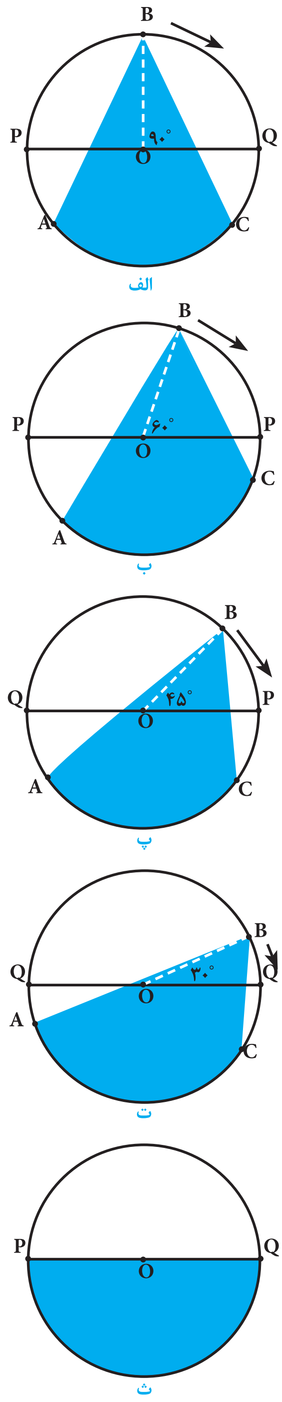
من موقعیت‌هایی را ازنقطهٔ B انتخاب کردم که OB زاویه‌ای زیبا با قطر PQ می‌ساخت. برای مثال، زاویه‌هایی که سینوس و کسینوس آن‌ها را می‌دانستم – (°۶۰، °۴۵ و °۳۰)– شکل‌های ۲۱ الف– ث– را ببینید. من انجام محاسبات را به‌عهدهٔ خواننده می‌گذارم.

مسئلهٔ سه را پیش‌تر ببریم

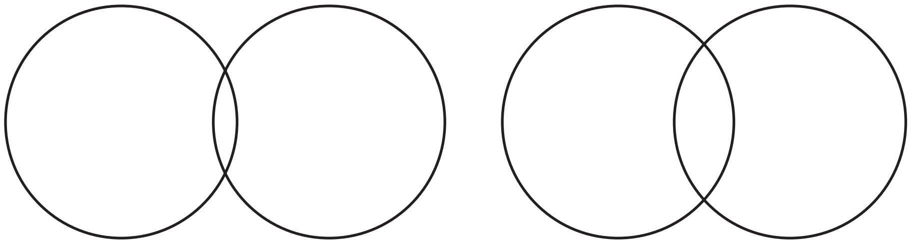
اما من هنوز کارم با مسئلهٔ پیتزا تمام نشده است. چند کاغذ دایره‌ای شکلِ یک اندازه برایم باقی مانده بود. شروع کردم به حرکت دادن آن‌ها و در جایی، دو تا از آن‌ها روی هم قرار گرفتند. (شکل‌های ۲۲الف– ت را ببینید).

از خودم پرسیدم «مساحت ناحیهٔ روی‌هم افتاده چقدر است؟» بعد از خودم پرسیدم «آیا می‌توانم آن‌ها را جوری قرار دهم که یکی بتواند دو پیتزا را بین سه نفر تقسیم کند؟»

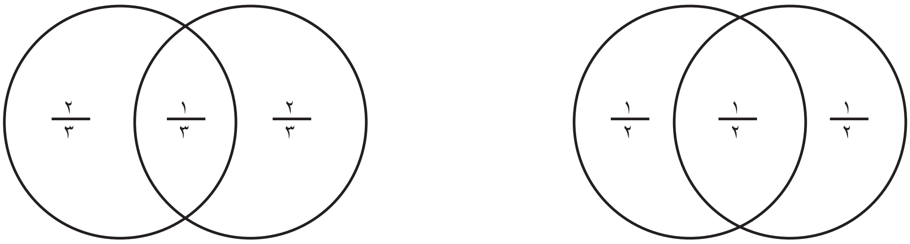
خوب اگر مساحت‌ها آن‌گونه باشد که در شکل ۲۲پ نشان داده شده است، دو نفر می‌توانند



شکل ۲۱: طرح‌هایی به شکل برش کیک که هر یک مساحتی برابر نصف مساحت دایره را دارد



ب) هم‌پوشانی بیشتر　　الف) هم‌پوشانی کم



ت) نصف هر پیتزا　　شکل ۲۲　　پ) هنوز هم بیشتر

دو سوم یک پیتزا را در قالب یک تکه بگیرند و نفــر باقی‌مانده دو تکه را که هر کدام به اندازهٔ یک‌ســوم پیتزاست، بگیرد. محاسبات این حالت را به‌عهدهٔ خواننده می‌گــذارم. در عوض، من به حرکت دادن دایره‌ها ادامه دادم (شکل ۲۲ت) و دریافتــم کــه اگر هر ناحیه نصف مساحت دایره را داشته باشد، دو پیتزا را می‌توان به شکل جالب‌تری، به غیر از نصف کردن پیتزاها از وسط، بین چهار نفر تقسیم کرد!

تا چه حد بایــد دو دایره روی‌هم قرار بگیرند، یا تا چه حد باید مرکز دو دایرهٔ هم‌نهشــت از هم دور باشند تا هر یک از ناحیه‌های نشان داده شده نصف مســاحت دایره را داشته باشد؟ برای کشیدن یک شکل آراسته، ابتدا از خودم پرســیدم مرکز این دایره‌ها کجا باید بیافتــد. خود را متقاعد کن که آن‌ها در ناحیهٔ وسط قرار می‌گیرند.

پس مسئله به اینجا ختم می‌شود که بپرسیم مرکز آن‌ها تا چه اندازه باید از هم فاصله بگیرند.

عایدی من از انجام این محاسبات این بود که پی بردم این مسئله به‌خوبی در مجموعهٔ رو به گســترش مسائل پیتزای من جا می‌گیرد.

مسئلهٔ چهار پیتزا ●●●●

چگونــه می‌توانید دو پیتزای هم اندازه را بین چهار نفر تقسیم کنید؟ البته نــه با نصف کردن هــر پیتزا با اســتفاده از یــک خط راســت (یا با برش‌های فانتزی مانند شــکل ۱۳)، بلکه با روی‌هم قرار دادن آن‌ها و بریدن دورِ روی‌هم رفتگی‌ها.

برای انجام محاســبات آسان، به حالت متفاوتی نگاه کنید که در آن، هر دایره از مرکز دایرهٔ دیگر عبور می‌کند. این حالت به‌دلیل زاویه‌های شــصت درجه آسان است. مساحت هر ناحیه چقدر است؟ دوباره، دنبالهٔ فیلم به ذهن می‌آید که مســاحت ناحیه‌ها، وقتی دایره‌ها روی هم (به سوی هم) حرکت می‌کنند را نشــان می‌دهد. مساحت ناحیهٔ روی‌هم رفته، به‌عنوان تابعی از فاصله بین مرکزها، چقدر است؟

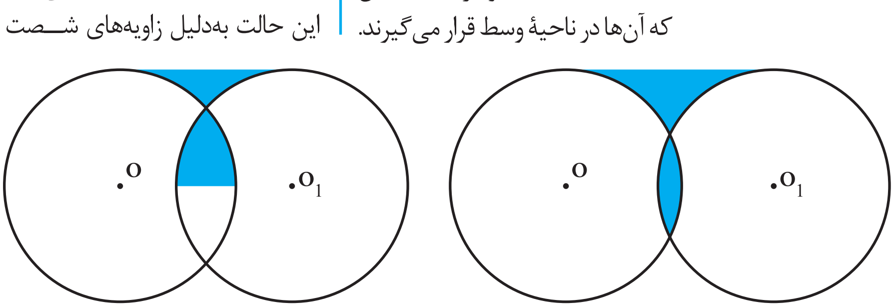
در ایــن حین، داشــتم مقالات متنوعــی را که طی ســال‌ها درمورد قضیهٔ فیثاغورس جمع کــرده بودم، مرتب می‌کردم که به مقاله‌ای رسیدم کــه آن را به‌دلیل عنوانش کپی کرده بودم، اما در حقیقت هنوز آن را نخوانده بودم (مک نیل، ۱۹۹۹). در یک لحظه، متوجه شکل‌های دایره در صفحهٔ دوم آن شدم و بلافاصله آن را خواندم! ضمن طرح مطالب متنوع، این مقاله چگونگی یافتن مساحت دایره‌ای را که مساحت آن برابر تفاضل مساحت دو دایره داده شده باشد، مورد بحث قرار داده بود. من روی حالتی که مجموع دو مســاحت، برابر مســاحت بزرگ‌تر شود متمرکز شده بودم. البته یک نفر می‌تواند روی آن برحسب تفاضل فکر کند- هر چند که من تا قبل از خواندن مقاله، این کار را نکرده بودم. بنابراین، اینجا هنوز یک مسئلهٔ پیتزای دیگر هست.

مسئلهٔ پنج پیتزا ●●●●●

قطر پیتزایی را بیابید که مساحت آن برابر تفاضل مســاحت دو پیتزای داده شده باشد.

دو مقالــهٔ دیگر هم هســت که من باید به آن‌ها اشاره کنم. در پوشهٔ دیگری که کامــلاً هم نامرتبط نبود، به مقاله‌ای برخــوردم (پنر[13]، ۱۹۷۸) حاوی مســئلهٔ زیر که منســوب به کروتتسکی[14] (۱۹۷۶، ص. ۳۰۹) بود.

اگر شــعاع هر یک از دایره‌ها $r=1$ باشد و مســاحت ناحیه‌های سایه‌دار مساوی باشــد، فاصلهٔ OO_1 را بیابید. (شکل ۲۳الف را ببینید.)



ب) نمودار نادرستی که من کشیدم　　الف) نمودار، همان‌طور که در مقاله داده شده

شکل ۲۳

دلیل آوردن این مسئله در اینجا آن بود که این تنها مسئلهٔ موردِ بحث من در کنفرانس ATM بود که آن را خودم نساخته بودم و بدون نگاه کردن به نوشته‌هایم، شکل نادرستی برای آن کشیدم. از این‌رو یک مسئلهٔ زیبای ساده که با یک آها! قابل درک بود، تبدیل شد به یک مسئلهٔ سخت و ناجور که افراد برای حل آن تقلای زیادی کردند، زیرا به آن‌ها گفته بودم که راه‌حل سادهٔ زیبایی برای آن وجود دارد!

کمابیش این مقاله را تمام کرده بودم که جان شارپ، یکی از شرکت‌کنندگان در سخنرانی من در ATM، با ارسال پیام زیر، مرا از وجود مقاله‌ای که ممکن بود مورد علاقه‌ام باشد، مطلع ساخت:

مقاله‌ای در مجلهٔ ریاضی[15] مربوط به اوایل دههٔ ۱۹۶۰ پیدا کردم. این مقاله در مورد بُزی بود که در یک مزرعهٔ دایره‌ای شکل، با طناب، به‌گونه‌ای به نرده‌ها بسته شده که می‌تواند نصف علف‌های آنجا را بخورد. و پرسیده شده بود که طول طناب چقدر است؟ در این مقاله، پیشینهٔ مسئله که به دههٔ ۱۸۹۰ برمی‌گردد، به شکل‌های مختلف ارائه شده است.

من به جان شارپ جواب دادم: فکر کنم مسئلهٔ مربوط به بز را قبلاً دیده‌ام. اما آن مسئله، مرا جذب نکرد.

او جواب داد: نکته را نگرفته‌اید. این **دقیقاً** همان مسئلهٔ تو با داستانی متفاوت است. پس من هم آن را در اینجا آوردم (فریزر، ۱۹۸۲)، زیرا این مقاله بر مبنای منابع تاریخی زیاد، به‌طور دلپذیری نوشته شده است.

نگاه به عقب

با نگاهی به یک مسئلهٔ قدیمی مربع شروع کردم. در ابتدا هیچ ایده‌ای نداشتم که من را به کجا سوق خواهد داد. حال متعجبم که تا چه حد مرا از مسئلهٔ مربع دور کرده است؛ حتی بدون مطرح کردن سؤالات مربوطه در حالت سه بعدی.

حتماً می‌پرسید از چه روش‌هایی برای خلق این مسائل استفاده کردم؟ من ذهنی باز برای دیدن مشابهت‌ها و دیدن ارتباط بین ایده‌ها داشتم و اجازه دادم که مسائل قبلی با طرح این سؤال که «چطور می‌توانم آن را تغییر قیافه بدهم؟» مسائل جدید را به من نشان دهند. من سؤالات بسیاری پرسیدم، مانند: آیا بیش از یک راه وجود دارد؟ آیا می‌توانم شکل‌ها را حرکت بدهم؟ اگر نه چه؟ کاغذهای دایره‌ای نیز کمک کرد. هنوز هم فکر نمی‌کنم که شیرهٔ مسئلهٔ پیتزا کاملاً کشیده شده باشد. پس امیدوارم خوانندگان به کار کردن روی آن ادامه دهند.

یادداشت‌ها

[۱] من این بخت خوب را داشتم که بیش از چهل سال پیش، در مؤسسهٔ تابستانی NSF در دانشگاه استانفورد، درسی با پروفسور پولیا داشته باشم، و هنوز هم می‌توانم صدای او را بشنوم که می‌گفت «به مسئله نگاه کن».

[۲] آخرین باری که از این مسئله استفاده کردم، در گردهمایی انجمن معلمان انگلستان در آوریل ۲۰۰۱ بود و در آنجا، چند نفر نیم‌دایره‌های کاغذی را به راه‌هایی غیر از راه من مورد استفاده قرار دادند و بعضی‌ها نیز از ربع دایره‌ها استفاده کردند. من قصد داشتم آن روش‌ها را به‌همراه نام مؤلفانشان در اینجا بنویسم، اما چون گزارش دقیقی از آنچه انجام دادند ندارم، تصمیم گرفتم این کار را نکنم.

[۳] این روش می‌تواند این حقیقت را تقویت کند که قضیهٔ فیثاغورس (و عکس آن) حالت خاصی است که در آن سه شکلِ روی اضلاع مثلث قائم‌الزاویه مربع هستند. فقط ضروری است که سه شکل روی سه ضلع مثلث قائم‌الزاویه متشابه باشند. حالا می‌توانستم همه را دوباره شروع کنم و بپرسم چطور یک نفر می‌تواند به‌سرعت بگوید که یک بیسکویت زنجبیلی دو برابر بزرگ‌تر از یک بیسکویت کوچک‌تر با همان شکل است. حتی بیشتر از آنی که فکر می‌کردم طول کشید تا بفهمم به مسئله‌ای برگشتم که اولین‌بار در دههٔ ۱۹۶۰ آن را مطرح کردم که من و همکارم از آن در کلاس استفاده می‌کردیم. براون و والتر (۱۹۹۰، ص. ۱۰۷) را ببینید.

[۴] برای توضیح کامل تکنیکِ «اگر نه چه؟» و بقیه، براون و والتِر (۱۹۹۰، ۱۹۹۳) را ببینید.

[۵] من مساحت گُوه را با در نظر گرفتن مساحت مثلث ABC به‌علاوهٔ مساحت قطاع AOC منهای مساحت مثلث AOC محاسبه کردم و سپس این مساحت را برابر $\pi/۲$ قرار دادم، یعنی نصف مساحت دایره. از کی بایلر، دانشجوی تحصیلات تکمیلی خواستم که راه‌حل مرا که منجر به معادلهٔ زیر شد، با استفاده از ماشین حسابش چک کند.

$$\sin(\theta) + \theta\pi/۱۸۰ - \pi/۲ = ۰$$

اگر چه این کار فقط ده ثانیه طول کشید، دوست دارم از او تشکر کنم! [۶] این کاری است که احتمالاً بیش از اندازه انجام می‌دهم و بعضی از دوستانم را کلافه می‌کند، اما می‌تواند خیلی مفید باشد!

پی‌نوشت‌ها

1. Marion Walter
2. Toppings
3. Frank Stella
4. Josef Albers
5. Think of a related problem
6. Look at the problem
7. در اینجا نقاط قطب‌نما معادل نقاط نشان‌دهندهٔ شمال، جنوب، مشرق و مغرب روی یک قطب‌نما در نظر گرفته شده است.
8. Max Bill
9. What-If-Not?
10. iteration
11. Beeney et al.
12. wedge
13. Penner
14. Krutetskii
15. *Mathematics Magazine*

منبع

Walter M. (2003). Looking at a pizza with a mathematical eye. For the Learning of Mathematics23(2), 3- 10.